Geometría elíptica

Ana Wright

16 septiembre, 2021

Los postulados de Euclides

1. Para cualquier par de puntos distintos A y B, existe una única (línea) recta trazando A y B.
2. Para cualquier par de segmentos AB y CD, existe un punto único E en la recta AB donde B está entre A y E y donde BE y CD son congruentes.
3. Para cualquier par de puntos distintos A y B, existe un círculo único con centro A y radio AB.
4. Ángulos rectos son congruentes.
5. (El postulado de las paralelas) Por un punto exterior de una recta hay una única paralela.

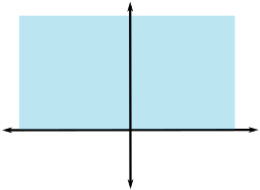
El postulado de las paralelas

Geometría euclidiana: Por un punto exterior de una recta hay una única paralela.

Geometría hiperbólica: Por un punto exterior de una recta hay dos distintas paralelas.

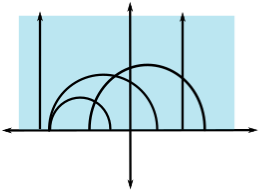
Geometría elíptica: Por un punto exterior de una recta no existe ninguna paralela.

Modelos euclídeos de la geometría hiperbólica



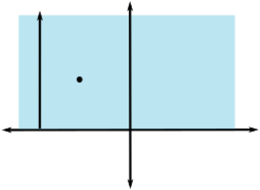
El semiplano
de Poincaré

Modelos euclídeos de la geometría hiperbólica



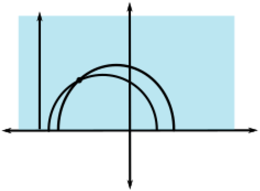
El semiplano
de Poincaré

Modelos euclídeos de la geometría hiperbólica



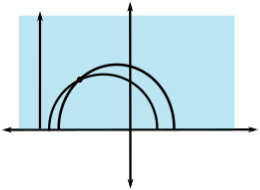
El semiplano
de Poincaré

Modelos euclídeos de la geometría hiperbólica

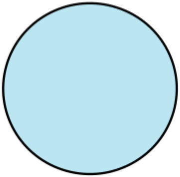


El semiplano
de Poincaré

Modelos euclídeos de la geometría hiperbólica

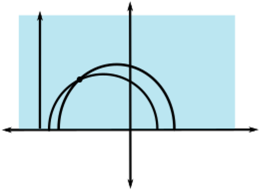


El semiplano
de Poincaré

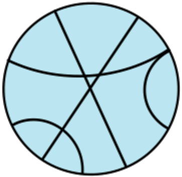


El disco
de Poincaré

Modelos euclídeos de la geometría hiperbólica

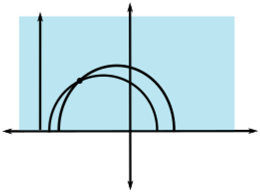


El semiplano
de Poincaré

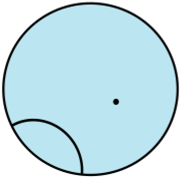


El disco
de Poincaré

Modelos euclídeos de la geometría hiperbólica

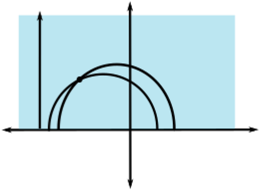


El semiplano
de Poincaré

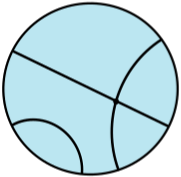


El disco
de Poincaré

Modelos euclídeos de la geometría hiperbólica

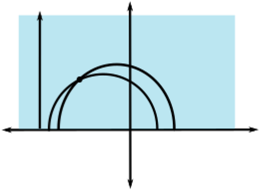


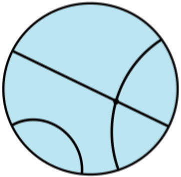
El semiplano
de Poincaré

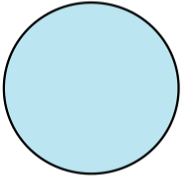


El disco
de Poincaré

Modelos euclídeos de la geometría hiperbólica





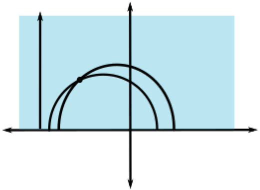


El semiplano
de Poincaré

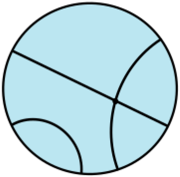
El disco
de Poincaré

El disco
de Beltrami-Klein

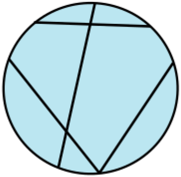
Modelos euclídeos de la geometría hiperbólica



El semiplano
de Poincaré

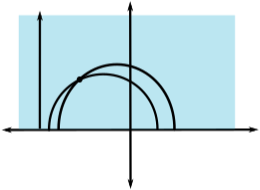


El disco
de Poincaré

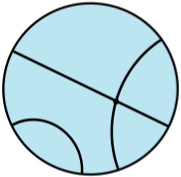


El disco
de Beltrami-Klein

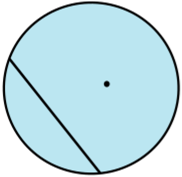
Modelos euclídeos de la geometría hiperbólica



El semiplano de Poincaré

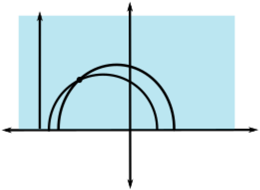


El disco de Poincaré

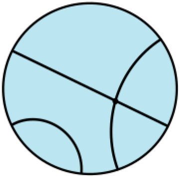


El disco de Beltrami-Klein

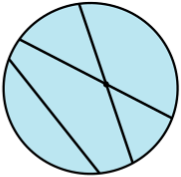
Modelos euclídeos de la geometría hiperbólica



El semiplano
de Poincaré

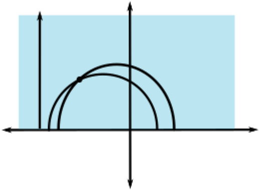


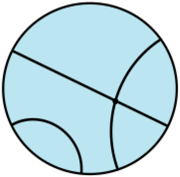
El disco
de Poincaré

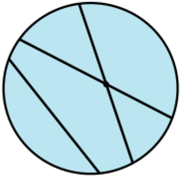


El disco
de Beltrami-Klein

Modelos euclídeos de la geometría hiperbólica







El semiplano
de Poincaré

El disco
de Poincaré

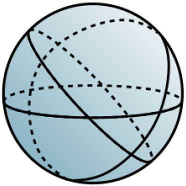
El disco
de Beltrami-Klein

Ángulos preservados

Ángulos no
preservados

Modelos de geometría elíptica

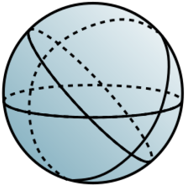
Podemos imaginar una geometría en una esfera donde las “rectas” son círculos máximos.

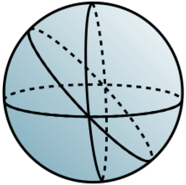


Esto se llama un plano doble elíptico. Entre puntos antipodales, hay infinitas rectas distintas así que para construir un modelo de geometría elíptica, deberíamos identificar pares de puntos antipodales.

Modelos de geometría elíptica

Podemos imaginar una geometría en una esfera donde las "rectas" son círculos máximos.

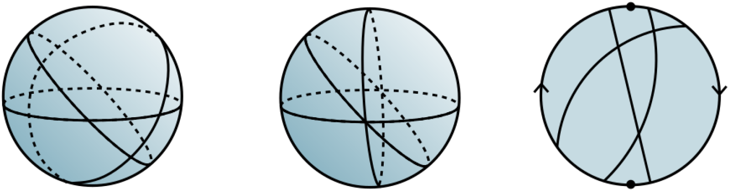




Esto se llama un plano doble elíptico. Entre puntos antipodales, hay infinitas rectas distintas así que para construir un modelo de geometría elíptica, deberíamos identificar pares de puntos antipodales.

Modelos de geometría elíptica

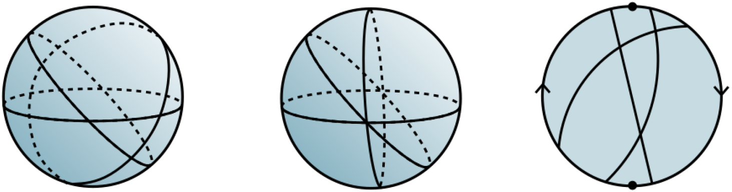
Podemos imaginar una geometría en una esfera donde las “rectas” son círculos máximos.



Esto se llama un plano doble elíptico. Entre puntos antipodales, hay infinitas rectas distintas así que para construir un modelo de geometría elíptica, deberíamos identificar pares de puntos antipodales.

Modelos de geometría elíptica

Podemos imaginar una geometría en una esfera donde las “rectas” son círculos máximos.

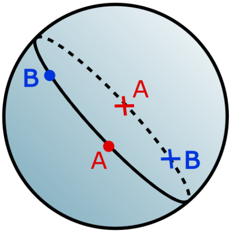


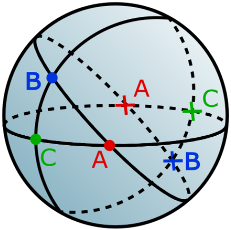
modelo esférico   el disco Klein

Esto se llama un plano doble elíptico. Entre puntos antipodales, hay infinitas rectas distintas así que para construir un modelo de geometría elíptica, deberíamos identificar pares de puntos antipodales.

Axiomas de Hilbert: Axiomas de combinación

1. Para cualquier par de puntos distintos A y B, existe una única recta trazando A y B.
2. Cada recta tiene dos puntos distintos.
3. Existen tres puntos distintos donde no existe una recta trazando todos los puntos.



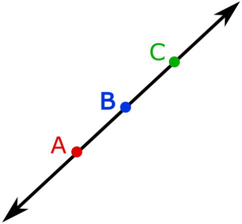


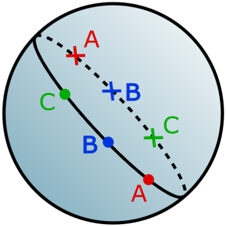
Axiomas de Hilbert: Axiomas de orden

1. Si el punto B está entre A y C, los tres puntos están en una recta y B también está entre C y A.
2. Para cualquier par de puntos B y D, existen puntos A, C y E donde
   - B está entre A y D
   - C está entre B y D
   - y D está entre B y E.
3. Si A, B y C son tres puntos distintos en una recta, entonces uno y solo uno de los puntos está entre los otros dos.
4. Si A, B y C son tres puntos distintos y a es una recta que no traza A, B y C, entonces
   - Si los segmentos AB y BC no trazan a la recta a, entonces el segmento AC tampoco traza a la recta a
   - y si los segmentos AB y BC trazan a la recta a, entonces el segmento AC no traza a la recta a.

Tenemos que arreglar las axiomas de orden

El concepto de que un punto B pueda ser “entre” dos puntos A y C no tiene sentido en la geometría elíptica.





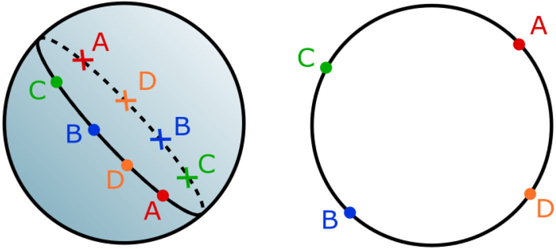
Axiomas para geometría elíptica: Axiomas de separación

En vez del concepto

$$\text{“}B \text{ está entre } A \text{ y } C\text{”},$$

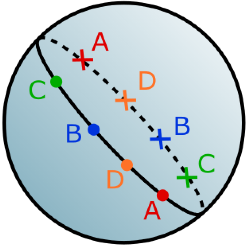
usaremos el concepto

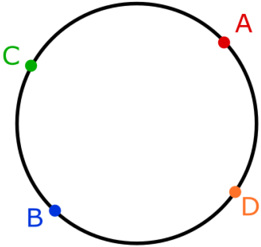
$$\text{“}A \text{ y } B \text{ separan } C \text{ y } D\text{”}.$$



Axiomas nuevas: Axiomas de separación

1. Si los puntos A y B separan los puntos C y D, entonces todos son puntos distintos en la misma recta.
2. ...hay 5 más axiomas de separación nuevas



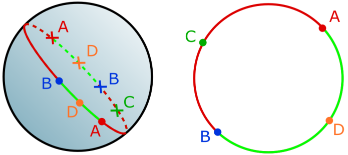


Axiomas de Hilbert: Axiomas de congruencia

1. Si A y B son puntos distintos, entonces para cualquier punto C y cualquier recta a trazando C, existe un punto D único en a a cada lado de C donde el segmento CD es congruente al segmento AB.
2. Si el segmento AB es congruente al segmento CD y AB es congruente al segmento EF, entonces CD es congruente a EF. También cada segmento es congruente con sí mismo.
3. ...hay 4 más axiomas de congruencia

Axiomas nuevas: Axiomas de congruencia

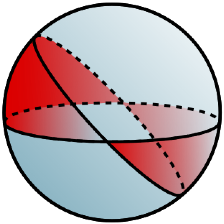
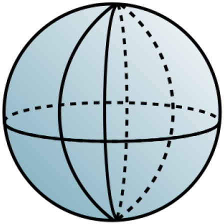
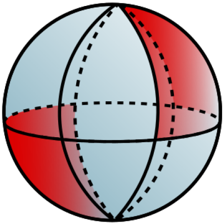
Para cada par de puntos, existen dos segmentos. Por ejemplo, el segmento en rojo entre A y B tiene el punto C y se escribe $[AB]_C$. El otro segmento se escribe $[AB]'_C$.



1. Cada segmento es congruente con sí mismo
2. Si $[AB]_G$ es congruente con $[CD]_G$ y $[CD]_G$ es congruente con $[EF]_G$, entonces $[AB]_G$ es congruente con $[EF]_G$.
3. Si $[AB]_E$ es congruente con $[CD]_F$, entonces $[AB]'_E$ es congruente con $[CD]'_F$.
4. ...hay 5 más axiomas de congruencia nuevas

Teoremas en geometría elíptica

- Existen polígonos con dos lados.
- Rectas tienen longitud finito
- Rectas perpendiculares a una recta fija tienen un punto común.
- La suma de ángulos interiores de un triángulo es más de 180 grados sexagesimales.

Fuentes

Tevian Dray
Models of Non-Euclidean Geometry (2020)

Marvin Greenberg
Euclidean and Non-Euclidean Geometries (1974)

Justine May
A Brief Survey of Elliptic Geometry (2012)